

Computation of a summation formula associated with certain special functions

M .P. Chaudhary^{a, *} Salahuddin^b and Sangeeta Chaudhary^c

^aInternational Scientific Research and Welfare Organization, New Delhi, India.

^bP.D.M College of Engineering, Bahadurgarh, Haryana, India.

^cFormer Faculty Member, BITS Pilani, India.

Abstract

The main aim of the present paper is to establish a summation formula involving certain special functions.

Keywords: Gauss second summation theorem, Recurrence relation, Prudnikov

2010 MSC: 33C05 , 33C20 , 33D15 , 33D50 , 33D60.

©2012 MJM. All rights reserved.

1 Introduction

Generalized Gaussian Hypergeometric function of one variable is defined by

$${}_A F_B \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_A ; \\ b_1, b_2, \dots, b_B ; \end{matrix} z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \dots (a_A)_k z^k}{(b_1)_k (b_2)_k \dots (b_B)_k k!} \quad (1)$$

where the parameters b_1, b_2, \dots, b_B are neither zero nor negative integers and A, B are non-negative integers and $|z| = 1$

Contiguous Relation is defined by

[Andrews p.363(9.16), E. D. p.51(10)]

$$(a-b) {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b ; \\ c ; \end{matrix} z \right] = a {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+1, b ; \\ c ; \end{matrix} z \right] - b {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b+1 ; \\ c ; \end{matrix} z \right] \quad (2)$$

Gauss second summation theorem is defined by [Prudnikov., 491(7.3.7.5)]

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b ; \\ \frac{a+b+1}{2} ; \end{matrix} \frac{1}{2} \right] = \frac{\Gamma(\frac{a+b+1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{a+1}{2}) \Gamma(\frac{b+1}{2})} \quad (3)$$

$$= \frac{2^{(b-1)} \Gamma(\frac{b}{2}) \Gamma(\frac{a+b+1}{2})}{\Gamma(b) \Gamma(\frac{a+1}{2})} \quad (4)$$

In a monograph of Prudnikov et al., a summation theorem is given in the form [Prudnikov., p.491(7.3.7.8)]

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b ; \\ \frac{a+b-1}{2} ; \end{matrix} \frac{1}{2} \right] = \sqrt{\pi} \left[\frac{\Gamma(\frac{a+b+1}{2})}{\Gamma(\frac{a+1}{2}) \Gamma(\frac{b+1}{2})} + \frac{2 \Gamma(\frac{a+b-1}{2})}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \right] \quad (5)$$

*Corresponding author.

E-mail address: mpchaudhary_2000@yahoo.com (M. P. Chaudhary), sludn@yahoo.com , vsludn@gmail.com (Salahuddin)

Now using Legendre’s duplication formula and Recurrence relation for Gamma function, the above theorem can be written in the form

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b ; \\ \frac{a+b-1}{2} ; \end{matrix} \frac{1}{2} \right] = \frac{2^{(b-1)} \Gamma(\frac{a+b-1}{2})}{\Gamma(b)} \left[\frac{\Gamma(\frac{b}{2})}{\Gamma(\frac{a-1}{2})} + \frac{2^{(a-b+1)} \Gamma(\frac{a}{2}) \Gamma(\frac{a+1}{2})}{\{\Gamma(a)\}^2} + \frac{\Gamma(\frac{b+2}{2})}{\Gamma(\frac{a+1}{2})} \right] \tag{6}$$

Recurrence relation is defined by

$$\Gamma(\zeta + 1) = \zeta \Gamma(\zeta) \tag{7}$$

2 Main formula

$$\begin{aligned} & {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b ; \\ \frac{a+b+46}{2} ; \end{matrix} \frac{1}{2} \right] = \\ & = \frac{2^b \Gamma(\frac{a+b+46}{2})}{(a-b) \Gamma(b)} \left[\frac{\Gamma(\frac{b}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2})} \left\{ \frac{1}{\left[\prod_{\zeta=0}^{21} \{a-b-2\zeta\} \right] \left[\prod_{\eta=1}^{22} \{a-b+2\eta\} \right]} \right\} \times \right. \\ & \times \left(4194304(-107145471557284795514880000a + 195291838708627789578240000a^2 \right. \\ & \quad - 156569123088349991534592000a^3 + 74473358203764465677107200a^4 \\ & \quad - 23811192195736807158054912a^5 + 5481259447061368207835136a^6 \\ & \quad - 948292268763887952199680a^7 + 126888416217818346291200a^8 - 13393761871844011671552a^9 \\ & \quad + 1130574271590544777216a^{10} - 77005895857888757760a^{11} + 4254539623864857600a^{12} \\ & \quad - 191027711898895872a^{13} + 6960284638689536a^{14} - 204763953757440a^{15} + 4818538806400a^{16} \\ & \quad - 89349365952a^{17} + 1275548736a^{18} - 13518120a^{19} + 100100a^{20} - 462a^{21} + a^{22} \\ & \quad + 107145471557284795514880000b + 544099662756275407552512000ab \\ & \quad - 214707088455270681437798400a^2b + 558803648319188167242547200a^3b \\ & \quad - 124626488196420160060391424a^4b + 76589682258781485165182976a^5b \\ & \quad - 10211457792319715925295104a^6b + 2878977486669978884112384a^7b \\ & \quad - 246395819137011656949760a^8b + 38995817187683205431296a^9b - 2221801102545787496448a^{10}b \\ & \quad + 216261270555291906048a^{11}b - 8291822969736024576a^{12}b + 517746324868286976a^{13}b \\ & \quad - 13186658427534592a^{14}b + 533571656983552a^{15}b - 8636653092672a^{16}b + 221751421056a^{17}b \\ & \quad - 2057016456a^{18}b + 31308816a^{19}b - 125818a^{20}b + 946a^{21}b + 195291838708627789578240000b^2 \\ & \quad + 214707088455270681437798400ab^2 + 1013820737421028969037168640a^2b^2 \\ & \quad - 108314139708425338286505984a^3b^2 + 302158850748929274166640640a^4b^2 \\ & \quad - 29771284120854232910266368a^5b^2 + 19694196117372618265329664a^6b^2 \\ & \quad - 1388623739871132154593280a^7b^2 + 417983263466651432951808a^8b^2 \\ & \quad - 20622266111066467088384a^9b^2 + 3449288077905817511936a^{10}b^2 - 117885481520131060736a^{11}b^2 \\ & \quad + 11998017793499063040a^{12}b^2 - 277636257039660288a^{13}b^2 + 17919113392649216a^{14}b^2 \\ & \quad - 267151285637632a^{15}b^2 + 11020924611136a^{16}b^2 - 95167656760a^{17}b^2 + 2443673144a^{18}b^2 \\ & \quad \left. - 9231068a^{19}b^2 + 135751a^{20}b^2 + 156569123088349991534592000b^3 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +558803648319188167242547200ab^3 + 108314139708425338286505984a^2b^3 \\
& +466153606552294291044040704a^3b^3 - 20900843249974028939034624a^4b^3 \\
& +57678665359458580243152896a^5b^3 - 3006622682387650474672128a^6b^3 \\
& +2001463868682331965947904a^7b^3 - 82549079270288939669504a^8b^3 \\
& +25068498657478566850560a^9b^3 - 756575731380797565952a^{10}b^3 + 127312149370480149504a^{11}b^3 \\
& -2683483632086070528a^{12}b^3 + 273162140985789440a^{13}b^3 - 3785489362783744a^{14}b^3 \\
& +242209382992896a^{15}b^3 - 1973241008024a^{16}b^3 + 79630140304a^{17}b^3 - 287404260a^{18}b^3 \\
& +7059052a^{19}b^3 + 74473358203764465677107200b^4 + 124626488196420160060391424ab^4 \\
& +302158850748929274166640640a^2b^4 + 20900843249974028939034624a^3b^4 \\
& +81637579765745056383762432a^4b^4 - 1861345312490852534714368a^5b^4 \\
& +4921332525029869113065472a^6b^4 - 148592519721237065650176a^7b^4 \\
& +96422465406931486231552a^8b^4 - 2435194656785214218752a^9b^4 + 724681220181884469504a^{10}b^4 \\
& -13568253239845953792a^{11}b^4 + 2236391710105439744a^{12}b^4 - 28469082137658624a^{13}b^4 \\
& +2826281258958080a^{14}b^4 - 21619108507040a^{15}b^4 + 1337751868596a^{16}b^4 - 4608048302a^{17}b^4 \\
& +177232627a^{18}b^4 + 23811192195736807158054912b^5 + 76589682258781485165182976ab^5 \\
& +29771284120854232910266368a^2b^5 + 57678665359458580243152896a^3b^5 \\
& +1861345312490852534714368a^4b^5 + 6603539161382830855192576a^5b^5 \\
& -84673352713297774153728a^6b^5 + 211310139502169635479552a^7b^5 \\
& -3863850704068409939456a^8b^5 + 2402371732497292514816a^9b^5 - 37522170157907452160a^{10}b^5 \\
& +10756989213658907648a^{11}b^5 - 121744987768371968a^{12}b^5 + 19331973916462592a^{13}b^5 \\
& -136278256884000a^{14}b^5 + 12978881608000a^{15}b^5 - 42181365226a^{16}b^5 + 2481256778a^{17}b^5 \\
& +5481259447061368207835136b^6 + 10211457792319715925295104ab^6 \\
& +19694196117372618265329664a^2b^6 + 3006622682387650474672128a^3b^6 \\
& +4921332525029869113065472a^4b^6 + 84673352713297774153728a^5b^6 \\
& +273482748886432393211904a^6b^6 - 2076771952214159456256a^7b^6 + 4854709750936670200576a^8b^6 \\
& -54343144439122995456a^9b^6 + 32045210028718222336a^{10}b^6 - 301251744439213568a^{11}b^6 \\
& +82291504751968512a^{12}b^6 - 515206630456672a^{13}b^6 + 77925205174432a^{14}b^6 - 233619868944a^{15}b^6 \\
& +21090682613a^{16}b^6 + 948292268763887952199680b^7 + 2878977486669978884112384ab^7 \\
& +1388623739871132154593280a^2b^7 + 2001463868682331965947904a^3b^7 \\
& +148592519721237065650176a^4b^7 + 211310139502169635479552a^5b^7 \\
& +2076771952214159456256a^6b^7 + 6122732220440579487744a^7b^7 - 27977292448047278336a^8b^7 \\
& +61005969350151654400a^9b^7 - 407431732173193728a^{10}b^7 + 226372726335788032a^{11}b^7 \\
& -1172083017545440a^{12}b^7 + 302753027024448a^{13}b^7 - 804690659696a^{14}b^7 + 114955808528a^{15}b^7 \\
& +126888416217818346291200b^8 + 246395819137011656949760ab^8 \\
& +417983263466651432951808a^2b^8 + 82549079270288939669504a^3b^8 \\
& +96422465406931486231552a^4b^8 + 3863850704068409939456a^5b^8 + 4854709750936670200576a^6b^8 \\
& +27977292448047278336a^7b^8 + 75475860748467415808a^8b^8 - 203003760763909248a^9b^8 \\
& +411923003650933632a^{10}b^8 - 1503961148566448a^{11}b^8 + 783779913404488a^{12}b^8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -1715884494940a^{13}b^8 + 416714805914a^{14}b^8 + 13393761871844011671552b^9 \\
& + 38995817187683205431296ab^9 + 20622266111066467088384a^2b^9 \\
& + 25068498657478566850560a^3b^9 + 2435194656785214218752a^4b^9 + 2402371732497292514816a^5b^9 \\
& + 54343144439122995456a^6b^9 + 61005969350151654400a^7b^9 + 203003760763909248a^8b^9 \\
& + 502213805637882624a^9b^9 - 730579753229040a^{10}b^9 + 1377434664214752a^{11}b^9 \\
& - 2113247220084a^{12}b^9 + 1029530696964a^{13}b^9 + 1130574271590544777216b^{10} \\
& + 2221801102545787496448ab^{10} + 3449288077905817511936a^2b^{10} + 756575731380797565952a^3b^{10} \\
& + 724681220181884469504a^4b^{10} + 37522170157907452160a^5b^{10} + 32045210028718222336a^6b^{10} \\
& + 407431732173193728a^7b^{10} + 411923003650933632a^8b^{10} + 730579753229040a^9b^{10} \\
& + 1660408530066000a^{10}b^{10} - 1006308200040a^{11}b^{10} + 1761039350070a^{12}b^{10} \\
& + 77005895857888757760b^{11} + 216261270555291906048ab^{11} + 117885481520131060736a^2b^{11} \\
& + 127312149370480149504a^3b^{11} + 13568253239845953792a^4b^{11} + 10756989213658907648a^5b^{11} \\
& + 301251744439213568a^6b^{11} + 226372726335788032a^7b^{11} + 1503961148566448a^8b^{11} \\
& + 1377434664214752a^9b^{11} + 1006308200040a^{10}b^{11} + 2104098963720a^{11}b^{11} \\
& + 4254539623864857600b^{12} + 8291822969736024576ab^{12} + 11998017793499063040a^2b^{12} \\
& + 2683483632086070528a^3b^{12} + 2236391710105439744a^4b^{12} + 121744987768371968a^5b^{12} \\
& + 82291504751968512a^6b^{12} + 1172083017545440a^7b^{12} + 783779913404488a^8b^{12} \\
& + 2113247220084a^9b^{12} + 1761039350070a^{10}b^{12} + 191027711898895872b^{13} \\
& + 517746324868286976ab^{13} + 277636257039660288a^2b^{13} + 273162140985789440a^3b^{13} \\
& + 28469082137658624a^4b^{13} + 19331973916462592a^5b^{13} + 515206630456672a^6b^{13} \\
& + 302753027024448a^7b^{13} + 1715884494940a^8b^{13} + 1029530696964a^9b^{13} + 6960284638689536b^{14} \\
& + 13186658427534592ab^{14} + 17919113392649216a^2b^{14} + 3785489362783744a^3b^{14} \\
& + 2826281258958080a^4b^{14} + 136278256884000a^5b^{14} + 77925205174432a^6b^{14} + 804690659696a^7b^{14} \\
& + 416714805914a^8b^{14} + 204763953757440b^{15} + 533571656983552ab^{15} + 267151285637632a^2b^{15} \\
& + 242209382992896a^3b^{15} + 21619108507040a^4b^{15} + 12978881608000a^5b^{15} + 233619868944a^6b^{15} \\
& + 114955808528a^7b^{15} + 4818538806400b^{16} + 8636653092672ab^{16} + 11020924611136a^2b^{16} \\
& + 1973241008024a^3b^{16} + 1337751868596a^4b^{16} + 42181365226a^5b^{16} + 21090682613a^6b^{16} \\
& + 89349365952b^{17} + 221751421056ab^{17} + 95167656760a^2b^{17} + 79630140304a^3b^{17} \\
& + 4608048302a^4b^{17} + 2481256778a^5b^{17} + 1275548736b^{18} + 2057016456ab^{18} + 2443673144a^2b^{18} \\
& + 287404260a^3b^{18} + 177232627a^4b^{18} + 13518120b^{19} + 31308816ab^{19} + 9231068a^2b^{19} + 7059052a^3b^{19} \\
& + 100100b^{20} + 125818ab^{20} + 135751a^2b^{20} + 462b^{21} + 946ab^{21} + b^{22}) \\
& + \frac{1}{\left[\prod_{\mu=0}^{22} \{a - b - 2\mu\} \right] \left[\prod_{\xi=1}^{21} \{a - b + 2\xi\} \right]} \left(16777216b(116835417521691373338624000a \right. \\
& + 28125699466628665914163200a^2 + 58830487303312307021414400a^3 \\
& + 8357630381311176342503424a^4 + 5414646363604754513264640a^5 \\
& + 498187083349892413784064a^6 + 152686290382212699521024a^7 \\
& \left. + 9519964161751374757888a^8 + 1637773645456507142144a^9 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +70525027615268548608a^{10} + 7408115142042620928a^{11} \\
& + 220112291277345792a^{12} + 14690239437993728a^{13} \\
& + 294659633454592a^{14} + 12598920966272a^{15} + 161915465856a^{16} \\
& + 4327664352a^{17} + 31831536a^{18} + 491876a^{19} + 1540a^{20} + 11a^{21} + 116835417521691373338624000b \\
& + 226216356505054472338145280a^2b + 23085853384533493388673024a^3b \\
& + 42596657565712057179832320a^4b + 3317057929942263958339584a^5b \\
& + 2031229727871340557107200a^6b + 113777261461504865337344a^7b \\
& + 33718970664166741245952a^8b + 1346033490226231279616a^9b + 22559073333209074688a^{10}b \\
& + 6339888946109069312a^{11}b + 648854692726186752a^{12}b + 12495420024887296a^{13}b \\
& + 808459848960384a^{14}b + 10105741289728a^{15}b + 414427759840a^{16}b + 3006978304a^{17}b \\
& + 75526748a^{18}b + 238392a^{19}b + 3311a^{20}b - 28125699466628665914163200b^2 \\
& + 226216356505054472338145280ab^2 + 106315345003413006572322816a^3b^2 \\
& + 5592201387587352898043904a^4b^2 + 9233971963059119562424320a^5b^2 \\
& + 428594882247871245844480a^6b^2 + 245681304324011271913472a^7b^2 \\
& + 8745761422212831318016a^8b^2 + 2469154658311706393600a^9b^2 + 64247076731195584512a^{10}b^2 \\
& + 10321203147577973248a^{11}b^2 + 188375185237384704a^{12}b^2 + 18473671918179968a^{13}b^2 \\
& + 222601677688064a^{14}b^2 + 13721151546112a^{15}b^2 + 97389445776a^{16}b^2 + 3756889532a^{17}b^2 \\
& + 11790944a^{18}b^2 + 271502a^{19}b^2 + 58830487303312307021414400b^3 \\
& - 23085853384533493388673024ab^3 + 106315345003413006572322816a^2b^3 \\
& + 18881491334335208163639296a^4b^3 + 568562562676880138567680a^5b^3 \\
& + 847549451293774414086144a^6b^3 + 24573874868858553565184a^7b^3 \\
& + 13122966589520136414208a^8b^3 + 302137670596723140608a^9b^3 + 80539981502597540352a^{10}b^3 \\
& + 1356828503183302656a^{11}b^3 + 206745582687160192a^{12}b^3 + 2360282331414784a^{13}b^3 \\
& + 219242056144640a^{14}b^3 + 1502397796864a^{15}b^3 + 87086974468a^{16}b^3 + 268243976a^{17}b^3 \\
& + 9580142a^{18}b^3 - 8357630381311176342503424b^4 + 42596657565712057179832320ab^4 \\
& - 5592201387587352898043904a^2b^4 + 18881491334335208163639296a^3b^4 \\
& + 1542081407404976488054784a^5b^4 + 28192590577296803094528a^6b^4 \\
& + 38166600905403491682304a^7b^4 + 705827728752012911616a^8b^4 + 350235023692465902848a^9b^4 \\
& + 5183585762653455872a^{10}b^4 + 1297007316669623936a^{11}b^4 + 13619908987053824a^{12}b^4 \\
& + 1953639560494720a^{13}b^4 + 12668736904640a^{14}b^4 + 1104721948816a^{15}b^4 + 3286859628a^{16}b^4 \\
& + 177232627a^{17}b^4 + 5414646363604754513264640b^5 - 3317057929942263958339584ab^5 \\
& + 9233971963059119562424320a^2b^5 - 568562562676880138567680a^3b^5 \\
& + 1542081407404976488054784a^4b^5 + 64311349472759628675072a^6b^5 \\
& + 734302727002863349760a^7b^5 + 906641355715486806272a^8b^5 + 10657379160455346176a^9b^5 \\
& + 4906070283219540864a^{10}b^5 + 44976721663933696a^{11}b^5 + 10518844238424704a^{12}b^5 \\
& + 62529614167552a^{13}b^5 + 8393796705392a^{14}b^5 + 23597966560a^{15}b^5 + 1917334783a^{16}b^5 \\
& - 498187083349892413784064b^6 + 2031229727871340557107200ab^6 \\
& - 428594882247871245844480a^2b^6 + 847549451293774414086144a^3b^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -28192590577296803094528a^4b^6 + 64311349472759628675072a^5b^6 + 1447339812912113376256a^7b^6 \\
& + 10336382585586337280a^8b^6 + 11676188556897248384a^9b^6 + 84237361688480000a^{10}b^6 \\
& + 35936621746305280a^{11}b^6 + 185491443545408a^{12}b^6 + 40413183472816a^{13}b^6 + 103831052864a^{14}b^6 \\
& + 12978881608a^{15}b^6 + 152686290382212699521024b^7 - 113777261461504865337344ab^7 \\
& + 245681304324011271913472a^2b^7 - 24573874868858553565184a^3b^7 \\
& + 38166600905403491682304a^4b^7 - 734302727002863349760a^5b^7 + 1447339812912113376256a^6b^7 \\
& + 17913221110198860160a^8b^7 + 77535200126182656a^9b^7 + 80316848819494144a^{10}b^7 \\
& + 323795278490112a^{11}b^7 + 127895988844624a^{12}b^7 + 284008468128a^{13}b^7 + 57477904264a^{14}b^7 \\
& - 9519964161751374757888b^8 + 33718970664166741245952ab^8 - 8745761422212831318016a^2b^8 \\
& + 13122966589520136414208a^3b^8 - 705827728752012911616a^4b^8 + 906641355715486806272a^5b^8 \\
& - 10336382585586337280a^6b^8 + 17913221110198860160a^7b^8 + 119567125189072704a^9b^8 \\
& + 286328226518048a^{10}b^8 + 272441173357496a^{11}b^8 + 469610493352a^{12}b^8 + 171588449494a^{13}b^8 \\
& + 1637773645456507142144b^9 - 1346033490226231279616ab^9 + 2469154658311706393600a^2b^9 \\
& - 302137670596723140608a^3b^9 + 350235023692465902848a^4b^9 - 10657379160455346176a^5b^9 \\
& + 11676188556897248384a^6b^9 - 77535200126182656a^7b^9 + 119567125189072704a^8b^9 \\
& + 396284169175752a^{10}b^9 + 402523280016a^{11}b^9 + 352207870014a^{12}b^9 - 70525027615268548608b^{10} \\
& + 22559073333209074688ab^{10} - 64247076731195584512a^2b^{10} + 80539981502597540352a^3b^{10} \\
& - 5183585762653455872a^4b^{10} + 4906070283219540864a^5b^{10} - 84237361688480000a^6b^{10} \\
& + 80316848819494144a^7b^{10} - 286328226518048a^8b^{10} + 396284169175752a^9b^{10} \\
& + 503154100020a^{11}b^{10} + 7408115142042620928b^{11} - 6339888946109069312ab^{11} \\
& + 10321203147577973248a^2b^{11} - 1356828503183302656a^3b^{11} + 1297007316669623936a^4b^{11} \\
& - 44976721663933696a^5b^{11} + 35936621746305280a^6b^{11} - 323795278490112a^7b^{11} \\
& + 272441173357496a^8b^{11} - 402523280016a^9b^{11} + 503154100020a^{10}b^{11} - 220112291277345792b^{12} \\
& + 648854692726186752ab^{12} - 188375185237384704a^2b^{12} + 206745582687160192a^3b^{12} \\
& - 13619908987053824a^4b^{12} + 10518844238424704a^5b^{12} - 185491443545408a^6b^{12} \\
& + 127895988844624a^7b^{12} - 469610493352a^8b^{12} + 352207870014a^9b^{12} + 14690239437993728b^{13} \\
& - 12495420024887296ab^{13} + 18473671918179968a^2b^{13} - 2360282331414784a^3b^{13} \\
& + 1953639560494720a^4b^{13} - 62529614167552a^5b^{13} + 40413183472816a^6b^{13} - 284008468128a^7b^{13} \\
& + 171588449494a^8b^{13} - 294659633454592b^{14} + 808459848960384ab^{14} - 222601677688064a^2b^{14} \\
& + 219242056144640a^3b^{14} - 12668736904640a^4b^{14} + 8393796705392a^5b^{14} - 103831052864a^6b^{14} \\
& + 57477904264a^7b^{14} + 12598920966272b^{15} - 10105741289728ab^{15} + 13721151546112a^2b^{15} \\
& - 1502397796864a^3b^{15} + 1104721948816a^4b^{15} - 23597966560a^5b^{15} + 12978881608a^6b^{15} \\
& - 161915465856b^{16} + 414427759840ab^{16} - 97389445776a^2b^{16} + 87086974468a^3b^{16} \\
& - 3286859628a^4b^{16} + 1917334783a^5b^{16} + 4327664352b^{17} - 3006978304ab^{17} + 3756889532a^2b^{17} \\
& - 268243976a^3b^{17} + 177232627a^4b^{17} - 31831536b^{18} + 75526748ab^{18} - 11790944a^2b^{18} \\
& + 9580142a^3b^{18} + 491876b^{19} - 238392ab^{19} + 271502a^2b^{19} - 1540b^{20} + 3311ab^{20} + 11b^{21} \Big) \Big\} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\Gamma(\frac{b+1}{2})}{\Gamma(\frac{a+1}{2})} \left\{ \frac{16777216a}{\left[\prod_{\zeta=0}^{21} \{a-b-2\zeta\} \right] \left[\prod_{\eta=1}^{22} \{a-b+2\eta\} \right]} \left(116835417521691373338624000a \right. \right. \\
& \quad -28125699466628665914163200a^2 + 58830487303312307021414400a^3 \\
& \quad -8357630381311176342503424a^4 + 5414646363604754513264640a^5 \\
& \quad -498187083349892413784064a^6 + 152686290382212699521024a^7 - 9519964161751374757888a^8 \\
& \quad +1637773645456507142144a^9 - 70525027615268548608a^{10} + 7408115142042620928a^{11} \\
& \quad -220112291277345792a^{12} + 14690239437993728a^{13} - 294659633454592a^{14} + 12598920966272a^{15} \\
& \quad -161915465856a^{16} + 4327664352a^{17} - 31831536a^{18} + 491876a^{19} - 1540a^{20} + 11a^{21} \\
& \quad +116835417521691373338624000b + 226216356505054472338145280a^2b \\
& \quad -23085853384533493388673024a^3b + 42596657565712057179832320a^4b \\
& \quad -3317057929942263958339584a^5b + 2031229727871340557107200a^6b \\
& \quad -113777261461504865337344a^7b + 33718970664166741245952a^8b - 1346033490226231279616a^9b \\
& \quad +22559073333209074688a^{10}b - 6339888946109069312a^{11}b + 648854692726186752a^{12}b \\
& \quad -12495420024887296a^{13}b + 808459848960384a^{14}b - 10105741289728a^{15}b + 414427759840a^{16}b \\
& \quad -3006978304a^{17}b + 75526748a^{18}b - 238392a^{19}b + 3311a^{20}b + 28125699466628665914163200b^2 \\
& \quad +226216356505054472338145280ab^2 + 106315345003413006572322816a^3b^2 \\
& \quad -5592201387587352898043904a^4b^2 + 9233971963059119562424320a^5b^2 \\
& \quad -428594882247871245844480a^6b^2 + 245681304324011271913472a^7b^2 \\
& \quad -8745761422212831318016a^8b^2 + 2469154658311706393600a^9b^2 - 64247076731195584512a^{10}b^2 \\
& \quad +10321203147577973248a^{11}b^2 - 188375185237384704a^{12}b^2 + 18473671918179968a^{13}b^2 \\
& \quad -222601677688064a^{14}b^2 + 13721151546112a^{15}b^2 - 97389445776a^{16}b^2 + 3756889532a^{17}b^2 \\
& \quad -11790944a^{18}b^2 + 271502a^{19}b^2 + 58830487303312307021414400b^3 \\
& \quad +23085853384533493388673024ab^3 + 106315345003413006572322816a^2b^3 \\
& \quad +18881491334335208163639296a^4b^3 - 568562562676880138567680a^5b^3 \\
& \quad +847549451293774414086144a^6b^3 - 24573874868858553565184a^7b^3 \\
& \quad +13122966589520136414208a^8b^3 - 302137670596723140608a^9b^3 + 80539981502597540352a^{10}b^3 \\
& \quad -1356828503183302656a^{11}b^3 + 206745582687160192a^{12}b^3 - 2360282331414784a^{13}b^3 \\
& \quad +219242056144640a^{14}b^3 - 1502397796864a^{15}b^3 + 87086974468a^{16}b^3 - 268243976a^{17}b^3 \\
& \quad +9580142a^{18}b^3 + 8357630381311176342503424b^4 + 42596657565712057179832320ab^4 \\
& \quad +5592201387587352898043904a^2b^4 + 18881491334335208163639296a^3b^4 \\
& \quad +1542081407404976488054784a^5b^4 - 28192590577296803094528a^6b^4 \\
& \quad +38166600905403491682304a^7b^4 - 705827728752012911616a^8b^4 + 350235023692465902848a^9b^4 \\
& \quad -5183585762653455872a^{10}b^4 + 1297007316669623936a^{11}b^4 - 13619908987053824a^{12}b^4 \\
& \quad +1953639560494720a^{13}b^4 - 12668736904640a^{14}b^4 + 1104721948816a^{15}b^4 - 3286859628a^{16}b^4 \\
& \quad +177232627a^{17}b^4 + 5414646363604754513264640b^5 + 3317057929942263958339584ab^5 \\
& \quad +9233971963059119562424320a^2b^5 + 568562562676880138567680a^3b^5 \\
& \quad +1542081407404976488054784a^4b^5 + 64311349472759628675072a^6b^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -734302727002863349760a^7b^5 + 906641355715486806272a^8b^5 - 10657379160455346176a^9b^5 \\
& + 4906070283219540864a^{10}b^5 - 44976721663933696a^{11}b^5 + 10518844238424704a^{12}b^5 \\
& - 62529614167552a^{13}b^5 + 8393796705392a^{14}b^5 - 23597966560a^{15}b^5 + 1917334783a^{16}b^5 \\
& + 498187083349892413784064b^6 + 2031229727871340557107200ab^6 \\
& + 428594882247871245844480a^2b^6 + 847549451293774414086144a^3b^6 \\
& + 28192590577296803094528a^4b^6 + 64311349472759628675072a^5b^6 \\
& + 1447339812912113376256a^7b^6 - 10336382585586337280a^8b^6 + 11676188556897248384a^9b^6 \\
& - 84237361688480000a^{10}b^6 + 35936621746305280a^{11}b^6 - 185491443545408a^{12}b^6 \\
& + 40413183472816a^{13}b^6 - 103831052864a^{14}b^6 + 12978881608a^{15}b^6 + 152686290382212699521024b^7 \\
& + 113777261461504865337344ab^7 + 245681304324011271913472a^2b^7 \\
& + 24573874868858553565184a^3b^7 + 38166600905403491682304a^4b^7 + 734302727002863349760a^5b^7 \\
& + 1447339812912113376256a^6b^7 + 17913221110198860160a^8b^7 - 77535200126182656a^9b^7 \\
& + 80316848819494144a^{10}b^7 - 323795278490112a^{11}b^7 + 127895988844624a^{12}b^7 - 284008468128a^{13}b^7 \\
& + 57477904264a^{14}b^7 + 9519964161751374757888b^8 + 33718970664166741245952ab^8 \\
& + 8745761422212831318016a^2b^8 + 13122966589520136414208a^3b^8 + 705827728752012911616a^4b^8 \\
& + 906641355715486806272a^5b^8 + 10336382585586337280a^6b^8 + 17913221110198860160a^7b^8 \\
& + 119567125189072704a^9b^8 - 286328226518048a^{10}b^8 + 272441173357496a^{11}b^8 - 469610493352a^{12}b^8 \\
& + 171588449494a^{13}b^8 + 1637773645456507142144b^9 + 1346033490226231279616ab^9 \\
& + 2469154658311706393600a^2b^9 + 302137670596723140608a^3b^9 + 350235023692465902848a^4b^9 \\
& + 10657379160455346176a^5b^9 + 11676188556897248384a^6b^9 + 77535200126182656a^7b^9 \\
& + 119567125189072704a^8b^9 + 396284169175752a^{10}b^9 - 402523280016a^{11}b^9 + 352207870014a^{12}b^9 \\
& + 70525027615268548608b^{10} + 22559073333209074688ab^{10} + 64247076731195584512a^2b^{10} \\
& + 80539981502597540352a^3b^{10} + 5183585762653455872a^4b^{10} + 4906070283219540864a^5b^{10} \\
& + 84237361688480000a^6b^{10} + 80316848819494144a^7b^{10} + 286328226518048a^8b^{10} \\
& + 396284169175752a^9b^{10} + 503154100020a^{11}b^{10} + 7408115142042620928b^{11} \\
& + 6339888946109069312ab^{11} + 10321203147577973248a^2b^{11} + 1356828503183302656a^3b^{11} \\
& + 1297007316669623936a^4b^{11} + 44976721663933696a^5b^{11} + 35936621746305280a^6b^{11} \\
& + 323795278490112a^7b^{11} + 272441173357496a^8b^{11} + 402523280016a^9b^{11} + 503154100020a^{10}b^{11} \\
& + 220112291277345792b^{12} + 648854692726186752ab^{12} + 188375185237384704a^2b^{12} \\
& + 206745582687160192a^3b^{12} + 13619908987053824a^4b^{12} + 10518844238424704a^5b^{12} \\
& + 185491443545408a^6b^{12} + 127895988844624a^7b^{12} + 469610493352a^8b^{12} + 352207870014a^9b^{12} \\
& + 14690239437993728b^{13} + 12495420024887296ab^{13} + 18473671918179968a^2b^{13} \\
& + 2360282331414784a^3b^{13} + 1953639560494720a^4b^{13} + 62529614167552a^5b^{13} + 40413183472816a^6b^{13} \\
& + 284008468128a^7b^{13} + 171588449494a^8b^{13} + 294659633454592b^{14} + 808459848960384ab^{14} \\
& + 222601677688064a^2b^{14} + 219242056144640a^3b^{14} + 12668736904640a^4b^{14} + 8393796705392a^5b^{14} \\
& + 103831052864a^6b^{14} + 57477904264a^7b^{14} + 12598920966272b^{15} + 10105741289728ab^{15} \\
& + 13721151546112a^2b^{15} + 1502397796864a^3b^{15} + 1104721948816a^4b^{15} + 23597966560a^5b^{15} \\
& + 12978881608a^6b^{15} + 161915465856b^{16} + 414427759840ab^{16} + 97389445776a^2b^{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +87086974468a^3b^{16} + 3286859628a^4b^{16} + 1917334783a^5b^{16} + 4327664352b^{17} + 3006978304ab^{17} \\
& +3756889532a^2b^{17} + 268243976a^3b^{17} + 177232627a^4b^{17} + 31831536b^{18} + 75526748ab^{18} \\
& +11790944a^2b^{18} + 9580142a^3b^{18} + 491876b^{19} + 238392ab^{19} + 271502a^2b^{19} + 1540b^{20} + 3311ab^{20} + 11b^{21}) \\
& + \frac{4194304}{\left[\prod_{\mu=0}^{22} \{a-b-2\mu\} \right] \left[\prod_{\xi=1}^{21} \{a-b+2\xi\} \right]} \left(107145471557284795514880000a \right. \\
& +195291838708627789578240000a^2 + 156569123088349991534592000a^3 \\
& +74473358203764465677107200a^4 + 23811192195736807158054912a^5 \\
& +5481259447061368207835136a^6 + 948292268763887952199680a^7 \\
& +126888416217818346291200a^8 + 13393761871844011671552a^9 + 1130574271590544777216a^{10} \\
& +77005895857888757760a^{11} + 4254539623864857600a^{12} + 191027711898895872a^{13} \\
& +6960284638689536a^{14} + 204763953757440a^{15} + 4818538806400a^{16} + 89349365952a^{17} \\
& +1275548736a^{18} + 13518120a^{19} + 100100a^{20} + 462a^{21} + a^{22} - 107145471557284795514880000b \\
& +544099662756275407552512000ab + 214707088455270681437798400a^2b \\
& +558803648319188167242547200a^3b + 124626488196420160060391424a^4b \\
& +76589682258781485165182976a^5b + 10211457792319715925295104a^6b \\
& +2878977486669978884112384a^7b + 246395819137011656949760a^8b \\
& +38995817187683205431296a^9b + 2221801102545787496448a^{10}b + 216261270555291906048a^{11}b \\
& +8291822969736024576a^{12}b + 517746324868286976a^{13}b + 13186658427534592a^{14}b \\
& +533571656983552a^{15}b + 8636653092672a^{16}b + 221751421056a^{17}b + 2057016456a^{18}b + 31308816a^{19}b \\
& +125818a^{20}b + 946a^{21}b + 195291838708627789578240000b^2 - 214707088455270681437798400ab^2 \\
& +1013820737421028969037168640a^2b^2 + 108314139708425338286505984a^3b^2 \\
& +302158850748929274166640640a^4b^2 + 29771284120854232910266368a^5b^2 \\
& +19694196117372618265329664a^6b^2 + 1388623739871132154593280a^7b^2 \\
& +417983263466651432951808a^8b^2 + 20622266111066467088384a^9b^2 + 3449288077905817511936a^{10}b^2 \\
& +117885481520131060736a^{11}b^2 + 11998017793499063040a^{12}b^2 + 277636257039660288a^{13}b^2 \\
& +17919113392649216a^{14}b^2 + 267151285637632a^{15}b^2 + 11020924611136a^{16}b^2 + 95167656760a^{17}b^2 \\
& +2443673144a^{18}b^2 + 9231068a^{19}b^2 + 135751a^{20}b^2 - 156569123088349991534592000b^3 \\
& +558803648319188167242547200ab^3 - 108314139708425338286505984a^2b^3 \\
& +466153606552294291044040704a^3b^3 + 20900843249974028939034624a^4b^3 \\
& +57678665359458580243152896a^5b^3 + 3006622682387650474672128a^6b^3 \\
& +2001463868682331965947904a^7b^3 + 82549079270288939669504a^8b^3 \\
& +25068498657478566850560a^9b^3 + 756575731380797565952a^{10}b^3 + 127312149370480149504a^{11}b^3 \\
& +2683483632086070528a^{12}b^3 + 273162140985789440a^{13}b^3 + 3785489362783744a^{14}b^3 \\
& +242209382992896a^{15}b^3 + 1973241008024a^{16}b^3 + 79630140304a^{17}b^3 + 287404260a^{18}b^3 + 7059052a^{19}b^3 \\
& +74473358203764465677107200b^4 - 124626488196420160060391424ab^4 \\
& +302158850748929274166640640a^2b^4 - 20900843249974028939034624a^3b^4 \\
& +81637579765745056383762432a^4b^4 + 1861345312490852534714368a^5b^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4921332525029869113065472a^6b^4 + 148592519721237065650176a^7b^4 \\
& +96422465406931486231552a^8b^4 + 2435194656785214218752a^9b^4 + 724681220181884469504a^{10}b^4 \\
& +13568253239845953792a^{11}b^4 + 2236391710105439744a^{12}b^4 + 28469082137658624a^{13}b^4 \\
& +2826281258958080a^{14}b^4 + 21619108507040a^{15}b^4 + 1337751868596a^{16}b^4 + 4608048302a^{17}b^4 \\
& +177232627a^{18}b^4 - 23811192195736807158054912b^5 + 76589682258781485165182976ab^5 \\
& -29771284120854232910266368a^2b^5 + 57678665359458580243152896a^3b^5 \\
& -1861345312490852534714368a^4b^5 + 6603539161382830855192576a^5b^5 \\
& +84673352713297774153728a^6b^5 + 211310139502169635479552a^7b^5 \\
& +3863850704068409939456a^8b^5 + 2402371732497292514816a^9b^5 + 37522170157907452160a^{10}b^5 \\
& +10756989213658907648a^{11}b^5 + 121744987768371968a^{12}b^5 + 19331973916462592a^{13}b^5 \\
& +136278256884000a^{14}b^5 + 12978881608000a^{15}b^5 + 42181365226a^{16}b^5 + 2481256778a^{17}b^5 \\
& +5481259447061368207835136b^6 - 10211457792319715925295104ab^6 \\
& +19694196117372618265329664a^2b^6 - 3006622682387650474672128a^3b^6 \\
& +4921332525029869113065472a^4b^6 - 84673352713297774153728a^5b^6 \\
& +273482748886432393211904a^6b^6 + 2076771952214159456256a^7b^6 + 4854709750936670200576a^8b^6 \\
& +54343144439122995456a^9b^6 + 32045210028718222336a^{10}b^6 + 301251744439213568a^{11}b^6 \\
& +82291504751968512a^{12}b^6 + 515206630456672a^{13}b^6 + 77925205174432a^{14}b^6 + 233619868944a^{15}b^6 \\
& +21090682613a^{16}b^6 - 948292268763887952199680b^7 + 2878977486669978884112384ab^7 \\
& -1388623739871132154593280a^2b^7 + 2001463868682331965947904a^3b^7 \\
& -148592519721237065650176a^4b^7 + 211310139502169635479552a^5b^7 \\
& -2076771952214159456256a^6b^7 + 6122732220440579487744a^7b^7 + 27977292448047278336a^8b^7 \\
& +61005969350151654400a^9b^7 + 407431732173193728a^{10}b^7 + 226372726335788032a^{11}b^7 \\
& +1172083017545440a^{12}b^7 + 302753027024448a^{13}b^7 + 804690659696a^{14}b^7 + 114955808528a^{15}b^7 \\
& +126888416217818346291200b^8 - 246395819137011656949760ab^8 + 417983263466651432951808a^2b^8 \\
& -82549079270288939669504a^3b^8 + 96422465406931486231552a^4b^8 - 3863850704068409939456a^5b^8 \\
& +4854709750936670200576a^6b^8 - 27977292448047278336a^7b^8 + 75475860748467415808a^8b^8 \\
& +203003760763909248a^9b^8 + 411923003650933632a^{10}b^8 + 1503961148566448a^{11}b^8 \\
& +783779913404488a^{12}b^8 + 1715884494940a^{13}b^8 + 416714805914a^{14}b^8 - 13393761871844011671552b^9 \\
& +38995817187683205431296ab^9 - 20622266111066467088384a^2b^9 + 25068498657478566850560a^3b^9 \\
& -2435194656785214218752a^4b^9 + 2402371732497292514816a^5b^9 - 54343144439122995456a^6b^9 \\
& +61005969350151654400a^7b^9 - 203003760763909248a^8b^9 + 502213805637882624a^9b^9 \\
& +730579753229040a^{10}b^9 + 1377434664214752a^{11}b^9 + 2113247220084a^{12}b^9 + 1029530696964a^{13}b^9 \\
& +1130574271590544777216b^{10} - 2221801102545787496448ab^{10} + 3449288077905817511936a^2b^{10} \\
& -756575731380797565952a^3b^{10} + 724681220181884469504a^4b^{10} - 37522170157907452160a^5b^{10} \\
& +32045210028718222336a^6b^{10} - 407431732173193728a^7b^{10} + 411923003650933632a^8b^{10} \\
& -730579753229040a^9b^{10} + 1660408530066000a^{10}b^{10} + 1006308200040a^{11}b^{10} + 1761039350070a^{12}b^{10} \\
& -77005895857888757760b^{11} + 216261270555291906048ab^{11} - 117885481520131060736a^2b^{11} \\
& +127312149370480149504a^3b^{11} - 13568253239845953792a^4b^{11} + 10756989213658907648a^5b^{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -301251744439213568a^6b^{11} + 226372726335788032a^7b^{11} - 1503961148566448a^8b^{11} \\
& + 1377434664214752a^9b^{11} - 1006308200040a^{10}b^{11} + 2104098963720a^{11}b^{11} \\
& + 4254539623864857600b^{12} - 8291822969736024576ab^{12} + 11998017793499063040a^2b^{12} \\
& - 2683483632086070528a^3b^{12} + 2236391710105439744a^4b^{12} - 121744987768371968a^5b^{12} \\
& + 82291504751968512a^6b^{12} - 1172083017545440a^7b^{12} + 783779913404488a^8b^{12} \\
& - 2113247220084a^9b^{12} + 1761039350070a^{10}b^{12} - 191027711898895872b^{13} \\
& + 517746324868286976ab^{13} - 277636257039660288a^2b^{13} + 273162140985789440a^3b^{13} \\
& - 28469082137658624a^4b^{13} + 19331973916462592a^5b^{13} - 515206630456672a^6b^{13} \\
& + 302753027024448a^7b^{13} - 1715884494940a^8b^{13} + 1029530696964a^9b^{13} + 6960284638689536b^{14} \\
& - 13186658427534592ab^{14} + 17919113392649216a^2b^{14} - 3785489362783744a^3b^{14} \\
& + 2826281258958080a^4b^{14} - 136278256884000a^5b^{14} + 77925205174432a^6b^{14} - 804690659696a^7b^{14} \\
& + 416714805914a^8b^{14} - 204763953757440b^{15} + 533571656983552ab^{15} - 267151285637632a^2b^{15} \\
& + 242209382992896a^3b^{15} - 21619108507040a^4b^{15} + 12978881608000a^5b^{15} - 233619868944a^6b^{15} \\
& + 114955808528a^7b^{15} + 4818538806400b^{16} - 8636653092672ab^{16} + 11020924611136a^2b^{16} \\
& - 1973241008024a^3b^{16} + 1337751868596a^4b^{16} - 42181365226a^5b^{16} + 21090682613a^6b^{16} \\
& - 89349365952b^{17} + 221751421056ab^{17} - 95167656760a^2b^{17} + 79630140304a^3b^{17} - 4608048302a^4b^{17} \\
& + 2481256778a^5b^{17} + 1275548736b^{18} - 2057016456ab^{18} + 2443673144a^2b^{18} - 287404260a^3b^{18} \\
& + 177232627a^4b^{18} - 13518120b^{19} + 31308816ab^{19} - 9231068a^2b^{19} + 7059052a^3b^{19} + 100100b^{20} \\
& - 125818ab^{20} + 135751a^2b^{20} - 462b^{21} + 946ab^{21} + b^{22} \Big) \Big] \Big\} \quad (8)
\end{aligned}$$

3 Derivation of the Main Formula

Putting $c = \frac{a+b+46}{2}$ and $z = \frac{1}{2}$ in equation (2), we get

$$(a-b) {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b & ; & 1 \\ \frac{a+b+46}{2} & ; & \frac{1}{2} \end{matrix} \right] = a {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+1, b & ; & 1 \\ \frac{a+b+46}{2} & ; & \frac{1}{2} \end{matrix} \right] - b {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b+1 & ; & 1 \\ \frac{a+b+46}{2} & ; & \frac{1}{2} \end{matrix} \right]$$

Now involving the derived formula [Salahuddin et. al. p.12-41(8)], the summation formula is obtained.

References

- [1] Andrews, L.C.(1992) ; *Special Function of Mathematics for Engineers,second Edition*, McGraw-Hill Co Inc., New York.
- [2] Arora, Asish, Singh, Rahul , Salahuddin. ; Development of a family of summation formulae of half argument using Gauss and Bailey theorems , *Journal of Rajasthan Academy of Physical Sciences.*, 7(2008), 335-342.
- [3] Bells, Richard. Wong, Roderick; *Special Functions, A Graduate Text*,Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2010.
- [4] Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Marichev, O.I.; *Integrals and Series Vol. 3: More Special Functions*. Nauka, Moscow, 1986. Translated from the Russian by G.G. Gould, Gordon and Breach Science Publishers, New York, Philadelphia, London, Paris, Montreux, Tokyo, Melbourne, 1990.
- [5] Rainville, E. D.; The contiguous function relations for ${}_pF_q$ with applications to Bateman's $J_n^{\mu,\nu}$ and Rice's $H_n(\zeta, p, \nu)$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51(1945), 714-723.

- [6] Salahuddin ,Chaudhary, M. P.,Kumar,Vinesh ; A summation formula of half argument collocated with contiguous relation , *Global Journal of Science Frontier Research*, 1(2012),11-41.

Received: October 12, 2014; *Accepted:* December 16, 2014

UNIVERSITY PRESS

Website: <http://www.malayajournal.org/>